

ANALISIS KESTABILAN DAN KEBIJAKAN KEUNTUNGAN MAKSIMAL PADA MODEL POPULASI SATU MANGSA-DUA PEMANGSA DENGAN TAHAPAN STRUKTUR

SYAMSUDDIN TOAHA¹, JEFFRY KUSUMA², KHAERUDDIN³, MAWARDI⁴

^{1,2,3,4}Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin
syamsuddint@yahoo.com, jeffry.kusuma@gmail.com, khaeruddin@gmail.com,
mawardibahri@gmail.com

Abstract

Pada tulisan ini dibahas suatu model pertumbuhan populasi satu mangsa dan dua pemangsa. Model itu menyatakan laju pertumbuhan populasi mangsa, populasi pemangsa belum dewasa, dan populasi pemangsa sudah dewasa. Dinamika ketiga populasi tersebut dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan differensial. Dengan menganggap bahwa populasi yang ditinjau bernilai ekonomi, maka ketiga populasi tersebut dieksploitasi dengan melibatkan fungsi biaya dan fungsi penerimaan. Kewujudan titik ekuilibrium model beserta kestabilannya dianalisis dengan menggunakan metode linearisasi dan uji kestabilan Routh-Hurwitz. Kajian pada model ini bertujuan untuk menjamin ketiga populasi tidak akan punah dalam jangka waktu yang panjang dan juga diperoleh keuntungan maksimal dari usaha eksploitasi. Beberapa kasus dianalisis disertai dengan simulasi numerik untuk mengetahui kestabilan titik ekuilibrium dan keuntungan maksimal. Hasil analisis menunjukkan bahwa kewujudan dan kestabilan titik ekuilibrium interior pada model ditentukan oleh nilai-nilai parameter model dan usaha pemanenan. Ketiga populasi dapat tetap lestari meskipun dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan dan sekaligus memberikan keuntungan maksimal.

Kata-kata kunci: Model mangsa pemangsa, pemanenan, kestabilan, keuntungan

1. Pendahuluan

Model pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa merujuk kepada model Lotka-Volterra merupakan salah model yang sangat populer dalam matematika ekologi. Luckinbill [1] menunjukkan bahwa populasi mangsa-pemangsa dapat hidup bersama untuk jangka waktu yang panjang jika kontak antara keduanya dikurangi. Martin & Ruan [2] menyarankan bahwa sangat ideal untuk mengkaji faktor pemanenan pada model populasi mangsa-pemangsa. Kar & Chauduri [3] mengkaji model mangsa-pemangsa dan kewujudan ekuilibrium bioekonomik serta pemanenan optimal. Holmberg [4] meneliti pengaruh pemanenan dengan usaha konstan dan ditunjukkan bahwa tangkapan dengan kuota konstan dapat mengakibatkan osilasi dan kacau serta menaikkan resiko eksploitasi yang berlebihan. Sistem satu mangsa dan satu pemangsa yang ditinjau dalam Hogart et.al. [5] dinyatakan bahwa kedua populasi mangsa dan pemangsa yang dipanen dengan hasil tangkapan konstan diperoleh suatu titik ekuilibrium yang stabil dan hasil maksimal yang lestari.

Model dinamika populasi mangsa-pemangsa memainkan peranan yang penting dalam bioekonomik, khususnya dalam manajemen sumberdaya yang terbarukan. Salah satu contoh

manajemen sumber daya terbarukan adalah populasi ikan. Tangkapan optimal berkelanjutan yang berdasarkan pada kriteria biaya bertujuan untuk memaksimalkan keuntungan. Faktor-faktor yang perlu dipertimbangkan dalam membuat model dinamika populasi yang kompleks adalah ukuran populasi, laju pertumbuhan, kapasitas bawaan, kompetitor, biaya operasional pemanenan, harga tangkapan, dan sebagainya, Clark [6]. Sun et al. [7] mengembangkan model dengan tahapan struktur yang mempertimbangkan kebijakan pemanenan optimal. Kar & Chattopadhyay [9] mengkaji model dengan tahapan struktur dan menghubungkannya dengan kebijakan pemanenan optimal. Problem kombinasi pemanenan telah dikaji secara mendalam oleh Chauduri [9].

Tulisan ini bertujuan untuk menganalisis suatu model pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa dengan struktur pada populasi pemangsa berdasarkan model Lotka-Volterra dengan melibatkan usaha pemanenan konstan. Analisis pada model ini difokuskan pada hubungan antara titik ekuilibrium interior model mangsa-pemangsa yang stabil dan keuntungan maksimal dari usaha eksploitasi.

2. Model Populasi Satu Mangsa dan Dua Pemangsa

Model yang ditinjau adalah model pertumbuhan populasi yang melibatkan tiga populasi, yaitu populasi mangsa, populasi pemangsa belum dewasa, dan populasi pemangsa sudah dewasa. Model dinamika populasi mangsa-pemangsa melibatkan dua populasi pemangsa dengan tahapan struktur telah ditinjau oleh Kar & Chattopadhyay [8] dengan beberapa asumsi yang berbeda. Model pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) - \alpha_1 N_1 N_3 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -r_2 N_2 + \beta_2 N_3 - \gamma_2 N_2 \\ \frac{dN_3}{dt} &= -r_3 N_3 + \gamma_2 N_2 + m\alpha_1 N_1 N_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Model (1) merupakan model dinamika pada populasi mangsa dan pemangsa dengan tahapan struktur karena melibatkan populasi pemangsa belum dewasa dan populasi pemangsa sudah dewasa. Variabel $N_1 = N_1(t)$ menyatakan ukuran populasi mangsa pada saat t , $N_2 = N_2(t)$ menyatakan ukuran populasi pemangsa belum dewasa pada saat t , dan $N_3 = N_3(t)$ menyatakan ukuran populasi pemangsa dewasa pada saat t .

Dengan asumsi bahwa ketiga populasi yang ditinjau merupakan populasi (stok) yang bermanfaat, maka ketiga populasi tersebut selanjutnya dieksploitasi dengan laju penangkapan proporsional dengan masing-masing ukuran populasi. Dengan pertimbangan tersebut, model (1) dikembangkan menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) - \alpha_1 N_1 N_3 - q_1 E_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -r_2 N_2 + \beta_2 N_3 - \gamma_2 N_2 - q_2 E_2 N_2 \\ \frac{dN_3}{dt} &= -r_3 N_3 + \gamma_2 N_2 + m\alpha_1 N_1 N_3 - q_3 E_3 N_3.\end{aligned}\tag{2}$$

Parameter q_1 , q_2 , dan q_3 pada model (2) masing-masing menyatakan koefisien ketertangkapan untuk populasi mangsa, populasi pemangsa belum dewasa, dan populasi pemangsa dewasa. Parameter E_1 , E_2 , dan E_3 masing-masing menyatakan usaha (effort) penangkapan yang memenuhi $0 \leq E_i \leq E_{maks}$ untuk $i = 1, 2, 3$.

Dengan memisalkan $r_4 = r_1/K$, $q_4 = r_1 - q_1E_1$, $q_5 = r_2 + \gamma_2 + q_2E_2$, $q_6 = r_3 + q_3E_3$, dan $\alpha_3 = m\alpha_1$, maka model (2) dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1(q_4 - r_4N_1 - \alpha_1N_1) \\ \frac{dN_2}{dt} &= -q_5N_2 + \beta_2N_3 \\ \frac{dN_3}{dt} &= -q_3N_3 + \gamma_2N_2 + \alpha_3N_1N_3.\end{aligned}\quad (3)$$

Titik ekuilibrium non negatif dari model (3) adalah $T_1 = (0, 0, 0)$, $T_2 = \left(\frac{q_4}{r_4}, 0, 0\right)$, dan

$$T_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E}) \quad \text{dimana} \quad N_{1E} = \frac{p_5}{\alpha_3q_5}, \quad N_{2E} = \frac{\beta_2p_6}{\alpha_3q_5^2\alpha_1}, \quad N_{3E} = \frac{\beta_2p_6}{\alpha_3q_5^2\alpha_1},$$

$p_5 = q_5q_6 - \beta_2\lambda_2$, dan $p_6 = q_4\alpha_3q_5 - p_5r_4$. Titik ekuilibrium T_3 merupakan titik interior jika $p_5 = q_5q_6 - \beta_2\lambda_2 > 0$ dan $p_6 = q_4\alpha_3q_5 - p_5r_4 > 0$, yaitu keadaan dimana ketiga komponen titik tersebut bernilai positif.

3. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Interior

Pada model (3) hanya titik ekuilibrium interior, yaitu titik T_3 , yang akan dianalisis kestabilannya karena pada titik ekuilibrium ini keadaan ukuran populasi mangsa, populasi pemangsa belum dewasa, dan populasi pemangsa dewasa bernilai positif. Analisis kestabilan titik ekuilibrium dilakukan dengan metode pelinearan dan penentuan kestabilan dengan memperhatikan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik T_3 . Dari model (3) diperoleh matriks Jacobian

$$J = \begin{pmatrix} q_4 - 2r_4N_1 - \alpha_1N_3 & 0 & -\alpha_1N_1 \\ 0 & -q_5 & \beta \\ \alpha_3N_3 & \gamma_2 & -q_6 + \alpha_3N_1 \end{pmatrix}.$$

Dengan mengevaluasi matriks Jacobian J pada titik T_3 diperoleh

$$J_E = \begin{pmatrix} q_4 - 2r_4N_{1E} - \alpha_1N_{3E} & 0 & -\alpha_1N_{1E} \\ 0 & -q_5 & \beta \\ \alpha_3N_{3E} & \gamma_2 & -q_6 + \alpha_3N_{1E} \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobian J pada titik ekuilibrium T_3 diberikan oleh

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - J_E), \text{ yaitu } f(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \text{ dimana}$$

$$a_2 = -\alpha_3N_{1E} + 2r_4N_{1E} + \alpha_1N_{3E} + q_6 + q_5 - q_4,$$

$$a_1 = q_6q_5 - q_5\alpha_3N_{1E} + \alpha_1N_{3E}q_6 + \alpha_1N_{3E}q_5 - q_4q_5 - 2r_4N_{1E}^2\alpha_3 + q_4\alpha_3N_{1E} \\ - q_4q_6 - q_4q_6 + 2r_4N_{1E}q_6 + 2r_4N_{1E}q_5 - \gamma_2\beta_2,$$

$$a_0 = -2r_4N_{1E}\gamma_2\beta_2 - q_4q_5q_6 + q_4q_5\alpha_3N_{1E} - 2r_4N_{1E}^2q_5\alpha_3 - \alpha_1N_{3E}\gamma_2\beta_2 + q_4\gamma_2\beta_2 \\ + \alpha_1N_{3E}q_5q_6 + 2r_4N_{1E}q_5q_6.$$

Titik ekuilibrium T_3 stabil asimptot secara lokal jika memenuhi tes kestabilan Routh-Hurwitz, yaitu $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, dan $a_2a_1 - a_0 > 0$, Jeffries, [10].

4. Kebijakan Keuntungan Maksimal pada Titik Ekuilibrium Interior

Titik ekuilibrium interior T_3 yang stabil asimptotik dihubungkan dengan persoalan keuntungan maksimal. Fungsi biaya diasumsikan proporsional dengan usaha pemanenan yang dilakukan dan juga bergantung kepada biaya tetap, yaitu $TC = c_1 + c_2 E$ dimana c_1 dan c_2 adalah suatu konstanta positif. Fungsi penerimaan didefinisikan sebagai $TR = PY(E)$, dimana P menyatakan fungsi harga per unit tangkapan dan $Y(E, N) = qEN$ menyatakan hasil pemanenan. Fungsi harga per unit tangkapan diasumsikan sebagai fungsi turun jika jumlah tangkapan meningkat, Chakraborty, et. al [11]. Untuk itu fungsi harga diasumsikan berbentuk $P = p_1 - v_1 Y$, dimana p_1 dan v_1 menyatakan suatu konstanta positif.

Fungsi keuntungan dinyatakan sebagai $\pi = TR - TC$. Titik ekuilibrium T_3 bergantung pada usaha pemanenan yang dilakukan. Dengan demikian fungsi keuntungan bergantung kepada usaha pemanenan, yaitu $\pi(E) = TR(E) - TC(E)$. Pada keadaan ini, nilai-nilai usaha pemanenan (E) akan ditentukan sehingga memberikan keuntungan maksimal dan titik ekuilibrium yang bersesuaian dengan usaha pemanenan tersebut juga stabil asimptotik. Kasus yang ditinjau adalah kasus dimana $E_1 = E_2 = E_3$, $E_3 = E_2$, dan $E_1 \neq E_2 \neq E_3$.

Kasus 1 ($E = E_1 = E_2 = E_3$)

Pada kasus 1, usaha pemanenan yang dikenakan pada setiap populasi adalah sama. Dengan demikian, titik T_3 berada pada oktan pertama jika (i) $p_5 = q_5 q_6 - \beta_2 \lambda_2 > 0$ dan (ii) $p_6 = q_4 \alpha_3 q_5 - p_5 r_4 > 0$. Syarat (i) dapat dinyatakan sebagai $A_1 E^2 + B_1 E + C_1 > 0$ dengan $A_1 = q_2 q_3 > 0$, $B_1 = r_3 q_2 + \gamma_2 q_3 + r_2 q_3 > 0$, dan $C_1 = r_2 r_3 + r_3 \gamma_2 - \gamma_2 \beta_2$. Syarat (ii) dapat dinyatakan sebagai $-A_2 E^2 + B_2 E + C_2 > 0$ dengan $A_2 = \alpha_3 q_1 q_2 K + r_1 q_2 q_3 > 0$, $B_2 = -\alpha_3 q_1 K(r_2 + \gamma_2) + \alpha_3 q_2 r_1 - r_1(r_3 q_2 + q_3(r_2 + \gamma_2))$, dan $C_2 = r_1(\gamma_2 \beta_2 - r_3(r_2 + \gamma_2))$.

Dengan asumsi bahwa terdapat nilai E yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta memenuhi $0 \leq E \leq E_{maks}$ maka titik T_3 berada pada oktan pertama. Fungsi keuntungan yang bersesuaian dengan titik T_3 diberikan sebagai

$$\pi(E) = (p_1 - v_1 q_1 E N_{1E}) q_1 E N_{1E} + (p_2 - v_2 q_2 E N_{2E}) q_2 E N_{2E} + (p_3 - v_3 q_3 E N_{3E}) q_3 E N_{3E} - (c_{11} + c_{21} + c_{31}) - (c_{12} + c_{22} + c_{32}) E,$$

dimana p_1, p_2, p_3, v_1, v_2 , dan v_3 menyatakan suatu konstanta positif yang berhubungan dengan harga stok. Konstanta c_{11}, c_{21} , dan c_{31} menyatakan biaya tetap dan konstanta c_{12}, c_{22} , dan c_{32} menyatakan biaya variabel. Pada fungsi keuntungan tersebut nilai N_{1E}, N_{2E} , dan N_{3E} bergantung pada E . Selanjutnya akan ditentukan nilai E yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta $0 \leq E \leq E_{maks}$ yang memaksimalkan $\pi(E)$ dan titik T_3 stabil asimptotik.

Contoh 1. Diberikan parameter untuk model (3) dengan nilai $r_1 = 1,5$, $r_2 = 0,2$, $r_3 = 0,3$, $K = 10.000$, $\beta_2 = 0,3$, $\alpha_1 = 0,001$, $m = 0,5$, $\lambda_2 = 0,05$, $q_1 = 0,1$, $q_2 = 0,2$, dan $q_3 = 0,3$. Demikian pula diberikan nilai $p_1 = 1$, $p_2 = 5$, $p_3 = 5$, $v_1 = 0,1$, $v_2 = 0,1$, $v_3 = 0,1$, $c_{11} = 2$, $c_{21} = 2$, $c_{31} = 2$, $c_{12} = 1$, $c_{22} = 1$, dan $c_{32} = 1$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik

$$T_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E}), \quad \text{dengan} \quad N_{1E} = \frac{600(4 + 9E + 4E^2)}{5 + 4E},$$

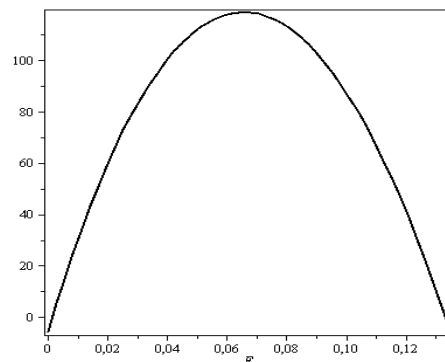
$$N_{2E} = \frac{60(714 + 469E - 76E^2)}{25 + 40E + 16E^2}, \text{ dan } N_{3E} = \frac{10(714 + 469E - 76E^2)}{5 + 4E}.$$

Titik T_3 merupakan titik interior jika nilai E memenuhi (i) $0,06E^2 + 0,135E + 0,06 > 0$ dan (ii) $-0,19E^2 + 1,1725E + 1,7850 > 0$. Dari syarat (i) diperoleh $\max\{0, -0,6096\} \leq E \leq E_{\max}$ dan dari syarat (ii) diperoleh $\max\{0, -1,2636\} \leq E \leq \min\{E_{\max}, 7,4347\}$. Dengan mengambil nilai $E_{\max} = 1$, maka diperoleh syarat $0 \leq E \leq 1$ sehingga titik T_3 merupakan titik interior.

Fungsi keuntungan yang bersesuaian dengan titik T_3 diberikan oleh $\pi(E) = (p_1q_1N_{1E} + p_2q_2N_{2E} + p_3q_3N_{3E})E - (c_1 + c_2 + c_3)E$. Dengan nilai parameter yang diberikan dan nilai pada titik ekuilibrium dan setelah disederhanakan diperoleh

$$\pi(E) = \frac{-0,3000}{(5 + 4E)^4} (5,8445 \times 10^5 E^8 - 5,7830 \times 10^5 E^7 + 3,8023 \times 10^6 E^6 + 4,5067 \times 10^7 E^5 + 1,1733 \times 10^8 E^4 + 1,2491 \times 10^8 E^3 + 4,1090 \times 10^7 E^2 - 8,0863 \times 10^6 E + 12.500).$$

Plot kurva fungsi keuntungan $\pi(E)$ diberikan pada Gambar 1. Dengan memperhatikan titik kritis fungsi keuntungan pada interval $0 \leq E \leq 1$ diperoleh titik kritis $E^* = 0,06577$ yang memaksimalkan fungsi keuntungan dengan $\pi(E^*) = 118,78250$.



Gambar 1. Fungsi keuntungan

Selanjutnya dengan mengambil nilai usaha pemanenan sebesar $E = E_* = 0,06577$ diperoleh titik $T_3 = (525,4553, 1.612,6831, 1.414,6054)$. Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan titik ekuilibrium tersebut diberikan oleh $f(\lambda) = \lambda^3 + 0,39897\lambda^2 + 0,39689\lambda + 0,09780$ dengan nilai eigen $-0,06443 \pm 0,59827i$ dan $-0,27011$. Hal ini bermakna bahwa dengan mengaplikasikan nilai usaha pemanenan sebesar $E = E_* = 0,06577$ maka ketiga populasi mangsa dan pemangsa yang dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan tetap akan lestari untuk waktu yang panjang dan juga memberikan keuntungan maksimal.

Kasus 2. $E_3 = E_2$

Pada kasus 2, usaha pemanenan yang dikenakan sama untuk populasi pemangsa belum dewasa dan populasi pemangsa dewasa. Dengan demikian, titik $T_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ berada pada

oktan pertama jika memenuhi (i) $p_5 = q_5 q_6 - \beta_2 \lambda_2 > 0$ dan (ii) $p_6 = q_4 \alpha_3 q_5 - p_5 r_4 > 0$. Syarat (i) dapat dinyatakan sebagai $A_3 E_2^2 + B_3 E_2 + C_3 > 0$ dengan $A_3 = q_2 q_3 > 0$, $B_3 = r_3 q_2 + \gamma_2 q_3 + r_2 q_3 > 0$, dan $C_3 = r_2 r_3 + r_3 \gamma_2 - \gamma_2 \beta_2$. Syarat (ii) dinyatakan sebagai $\alpha_3 (r_2 + \gamma_2 + q_2 E_2) (r_1 - q_1 E_1) - \frac{r_1}{K} ((r_3 + q_3 E_2) (r_2 + \gamma_2 + q_2 E_2) - \gamma_2 \beta_2) > 0$. Dengan asumsi bahwa terdapat pasangan (E_1, E_2) yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta memenuhi $0 \leq E_1 \leq E_{1maks}$ dan $0 \leq E_2 \leq E_{2maks}$ maka titik T_3 berada pada oktan pertama.

Fungsi keuntungan yang bersesuaian dengan titik T_3 diberikan sebagai

$$\pi(E_1, E_2) = (p_1 - v_1 q_1 E_1 N_{1E}) q_1 E_1 N_{1E} + (p_2 - v_2 q_2 E_2 N_{2E}) q_2 E_2 N_{2E} + (p_3 - v_3 q_3 E_2 N_{3E}) q_3 E_2 N_{3E} - (c_{11} + c_{21} + c_{31}) - c_{12} E - (c_{22} + c_{32}) E_2,$$

dimana p_1, p_2, p_3, v_1, v_2 , dan v_3 menyatakan suatu konstanta positif yang berhubungan dengan harga stok. Konstanta c_{11}, c_{21} , dan c_{31} menyatakan biaya tetap dan konstanta c_{12}, c_{22} , dan c_{32} menyatakan biaya variabel. Pada fungsi keuntungan tersebut nilai N_{1E}, N_{2E} , dan N_{3E} bergantung pada E_1 dan E_2 . Selanjutnya akan ditentukan nilai E_1 dan E_2 yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta $0 \leq E_1 \leq E_{1maks}$ dan $0 \leq E_2 \leq E_{2maks}$ yang memaksimalkan nilai $\pi(E_1, E_2)$ dan titik T_3 stabil asimptotik.

Contoh 2. Diberikan parameter untuk model (3) dengan nilai $r_1 = 1,5$, $r_2 = 0,2$, $r_3 = 0,3$, $K = 10.000$, $\beta_2 = 0,3$, $\alpha_1 = 0,001$, $m = 0,5$, $\lambda_2 = 0,05$, $q_1 = 0,1$, $q_2 = 0,2$, dan $q_3 = 0,3$. Demikian pula diberikan nilai $p_1 = 1$, $p_2 = 5$, $p_3 = 5$, $v_1 = 0,1$, $v_2 = 0,1$, $v_3 = 0,1$, $c_{11} = 2$, $c_{21} = 2$, $c_{31} = 2$, $c_{12} = 1$, $c_{22} = 1$, dan $c_{32} = 1$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik $T_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$, dengan

$$N_{1E} = \frac{600(4 + 9E_2 + 4E_2^2)}{5 + 4E_2}, \quad N_{2E} = \frac{60(714 + 519E_2 - 36E_2^2 - 50E_1 - 40E_2E_1)}{25 + 40E_2 + 16E_2^2}, \quad \text{dan}$$

$$N_{3E} = \frac{10(714 + 519E_2 - 36E_2^2 - 50E_1 - 40E_2E_1)}{5 + 4E_2}.$$

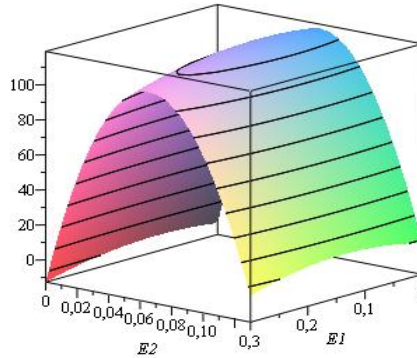
Titik T_3 merupakan titik interior jika nilai E_1 dan E_2 memenuhi (i) $0,06E_2^2 + 0,135E_2 + 0,06 > 0$ dan (ii) $1,785 + 1,2975E_2 - 0,090E_2^2 - 0,125E_1 - 0,1E_2E_1 > 0$. Dari syarat (i) diperoleh $\max\{0, -0,6096\} \leq E_2 \leq E_{2maks}$. Dengan mengambil nilai $E_{1maks} = 1$ dan $E_{2maks} = 1$, maka titik T_3 merupakan titik interior jika $(E_1, E_2) \in D_1$, dimana

$$D_1 = \{(E_1, E_2) : 0 \leq E_1 \leq 1, 0 \leq E_2 \leq 1, 1,785 + 1,2975E_2 - 0,090E_2^2 - 0,125E_1 - 0,1E_2E_1 > 0\}.$$

Dengan nilai parameter yang diberikan dan nilai pada titik ekuilibrium dan setelah disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned} \pi(E_1, E_2) = \frac{-0,1000}{(5 + 4E_2)^2} & \left(37.500 + 1,215 \times 10^8 E_2^2 + 3,125 \times 10^5 E_1 E_2 - 2,402 \times 10^7 E_1 E_2^2 \right. \\ & - 2,938 \times 10^5 E_1 - 2,397 \times 10^7 E_2 + 3,900 \times 10^8 E_2^3 + 3,926 \times 10^8 E_2^4 \\ & + 1,681 \times 10^8 E_2^5 + 1,876 \times 10^7 E_2^6 - 4,914 \times 10^6 E_2^7 + 1,866 \times 10^5 E_2^8 \\ & - 6,305 \times 10^7 E_1 E_2^3 - 6,214 \times 10^7 E_1 E_2^4 - 2,806 \times 10^7 E_1 E_2^5 - 4,424 \times 10^7 E_1 E_2^6 \\ & + 8,784 \times 10^6 E_1^2 E_2 + 2,238 \times 10^7 E_1^2 E_2^2 + 1,440 \times 10^7 E_1^2 + 2,928 \times 10^7 E_1^2 E_2^3 \\ & \left. + 2,071 \times 10^7 E_1^2 E_2^4 + 7,603 \times 10^6 E_1^2 E_2^5 + 1,152 \times 10^6 E_1^2 E_2^6 + 4,147 \times 10^5 E_1 E_2^7 \right). \end{aligned}$$

Plot permukaan fungsi keuntungan $\pi(E_1, E_2)$ diberikan pada Gambar 2. Dengan memperhatikan titik kritis fungsi keuntungan pada daerah D_1 diperoleh titik kritis $(E_1^*, E_2^*) = (0,09324, 0,06559)$ yang memaksimalkan fungsi keuntungan dengan $\pi(E_1^*, E_2^*) = 188,99321$.



Gambar 2. Permukaan fungsi keuntungan

Selanjutnya dengan mengambil pasangan nilai usaha pemanenan sebesar $(E_1^*, E_2^*) = (0,09324, 0,06559)$ diperoleh titik $T_3 = (525,3367, 1.609,7818, 1.411,8751)$. Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan titik ekuilibrium tersebut diberikan oleh $f(\lambda) = \lambda^3 + 0,39893\lambda^2 + 0,39608\lambda + 0,09758$ dengan nilai eigen $-0,06442 \pm 0,59761i$ dan $-0,27009$. Hal ini bermakna bahwa dengan mengaplikasikan nilai usaha pemanenan sebesar $E_1^* = 0,09324$ dan $E_2^* = 0,06559$ maka ketiga populasi mangsa dan pemangsa yang dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan tetap akan lestari untuk waktu yang panjang dan juga memberikan keuntungan maksimal.

Kasus 3 ($E_1 \neq E_2 \neq E_3$)

Pada kasus 3, usaha pemanenan yang dikenakan untuk ketiga populasi tidak sama. Dengan demikian, titik T_3 berada pada oktan pertama jika memenuhi (i) $p_5 = q_5 q_6 - \beta_2 \lambda_2 > 0$ dan (ii) $p_6 = q_4 \alpha_3 q_5 - p_5 r_4 > 0$. Selanjutnya syarat (i) dan (ii) dapat dinyatakan sebagai $(r_3 + q_3 E_3)(r_2 + \gamma_2 + q_2 E_2) - \gamma_2 \beta_2 > 0$ dan $\alpha_3 (r_2 + \gamma_2 + q_2 E_2)(r_1 - q_1 E_1) - \frac{r_1}{K} ((r_3 + q_3 E_3)(r_2 + \gamma_2 + q_2 E_2) - \gamma_2 \beta_2) > 0$. Dengan asumsi bahwa terdapat pasangan (E_1, E_2, E_3) yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta memenuhi

$0 \leq E_i \leq E_{maks}$ untuk $i = 1, 2, 3$, maka titik T_3 berada pada oktan pertama.

Fungsi keuntungan yang bersesuaian dengan titik T_3 diberikan sebagai

$$\pi(E_1, E_2, E_3) = (p_1 - v_1 q_1 E_1 N_{1E}) q_1 E_1 N_{1E} + (p_2 - v_2 q_2 E_2 N_{2E}) q_2 E_2 N_{2E} \\ + (p_3 - v_3 q_3 E_3 N_{3E}) q_3 E_3 N_{3E} - (c_{11} + c_{21} + c_{31}) - c_{12} E - c_{22} E_2 - c_{32} E_3,$$

dimana p_1, p_2, p_3, v_1, v_2 , dan v_3 menyatakan suatu konstanta positif yang berhubungan dengan harga stok. Konstanta c_{11}, c_{21} , dan c_{31} menyatakan biaya tetap dan konstanta c_{12}, c_{22} , dan c_{32} menyatakan biaya variabel. Pada fungsi keuntungan tersebut nilai N_{1E}, N_{2E} , dan N_{3E} bergantung pada E_1, E_2 , dan E_3 . Selanjutnya akan ditentukan nilai E_1, E_2 , dan E_3 yang memenuhi syarat (i) dan (ii) serta $0 \leq E_i \leq E_{maks}$ untuk $i = 1, 2, 3$ yang memaksimalkan nilai $\pi(E_1, E_2, E_3)$ dan titik T_3 stabil asimtotik.

Contoh 3. Diberikan parameter untuk model (3) dengan nilai $r_1=1,5, r_2=0,2, r_3=0,3, K=10.000, \beta_2=0,3, \alpha_1=0,001, m=0,5, \lambda_2=0,05, q_1=0,1, q_2=0,2$, dan $q_3=0,3$. Demikian pula diberikan nilai $p_1=1, p_2=5, p_3=5, v_1=0,1, v_2=0,1, v_3=0,1, c_{11}=2, c_{21}=2, c_{31}=2, c_{12}=1, c_{22}=1$, dan $c_{32}=1$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik $T_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$, dengan

$$N_{1E} = \frac{600(4 + 4E_2 + 5E_3 + 4E_2E_3)}{5 + 4E_2}, \\ N_{2E} = \frac{60(714 + 564E_2 - 45E_3 - 36E_2E_3 - 50E_1 - 40E_2E_1)}{25 + 40E_2 + 16E_2^2}, \text{ dan} \\ N_{3E} = \frac{10(714 + 564E_2 - 45E_3 - 36E_2E_3 - 50E_1 - 40E_2E_1)}{5 + 4E_2}.$$

Titik T_3 merupakan titik interior jika nilai E_1, E_2 , dan E_3 memenuhi (i) $0,06E_2E_3 + 0,06E_2 + 0,075E_3 + 0,06 > 0$ dan (ii) $(-0,125E_1 + 1,410E_2 - 0,1125E_3 - 0,090E_2E_3 - 0,01E_2E_1 + 1,785) > 0$. Dengan mengambil nilai $E_{1maks}=1, E_{2maks}=1$ dan $E_{3maks}=1$, maka titik T_3 merupakan titik interior jika $(E_1, E_2, E_3) \in D_2$, dimana

$$D_2 = \{(E_1, E_2, E_3) : 0 \leq E_1 \leq 1, 0 \leq E_2 \leq 1, 0 \leq E_3 \leq 1, 0,06E_2E_3 + 0,06E_2 \\ + 0,075E_3 + 0,06 > 0, (60 + 36E_2 - 30E_3 - 24E_2E_3 - 5E_1 - 4E_2E_1) > 0\}.$$

Dengan nilai parameter yang diberikan dan nilai pada titik ekuilibrium tersebut dan setelah disederhanakan diperoleh fungsi keuntungan $\pi(E_1, E_2, E_3)$ seperti diberikan pada Lampiran 1.

Dengan memperhatikan titik kritis fungsi keuntungan pada daerah D_2 diperoleh titik kritis $(E_1^*, E_2^*, E_3^*) = (0,09385, 0,07833, 0,05898)$ yang memberikan $\pi(E_1^*, E_2^*, E_3^*) = 121,26786$. Matriks Hessian untuk fungsi keuntungan pada titik kritis diberikan sebagai

$$H = \begin{pmatrix} -547,19327 & 97,79282 & 91,06443 \\ 97,79282 & -17,991,83453 & 113,58178 \\ 91,06443 & 113,58178 & -35,637,43429 \end{pmatrix},$$

dengan nilai eigen $-35,638,39842, -17,991,65823$, dan $-546,40544$. Dengan memperhatikan Matriks Hessian pada titik kritis (E_1^*, E_2^*, E_3^*) dan nilai-nilai eigen,

disimpulkan bahwa $\pi(E_1^*, E_2^*, E_3^*) = 121,26786$ merupakan nilai maksimum lokal.

Selanjutnya dengan mengambil pasangan nilai usaha pemanenan sebesar $(E_1^*, E_2^*, E_3^*) = (0,09385, 0,07833, 0,05898)$ diperoleh titik $T_3 = (522,46586, 1.594,75974, 1.412,24504)$. Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan titik ekuilibrium tersebut diberikan oleh $f(\lambda) = \lambda^3 + 0,40050\lambda^2 + 0,39417\lambda + 0,09801$ dengan nilai eigen $-0,06387 \pm 0,59603i$ dan $-0,27276$. Hal ini bermakna bahwa dengan mengaplikasikan nilai usaha pemanenan sebesar $E_1^* = 0,09385$, $E_2^* = 0,07833$, dan $E_3^* = 0,05898$ maka ketiga populasi mangsa dan pemangsa yang dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan tetap akan lestari untuk waktu yang panjang dan juga memberikan keuntungan maksimal.

5. Kesimpulan

Dari model dinamika populasi mangsa-pemangsa dengan pemanenan usaha konstan pada masing-masing populasi diperoleh satu titik ekuilibrium interior jika berlaku $q_5q_6 - \beta_2\lambda_2 > 0$, $q_4\alpha_3q_5 - p_5r_4 > 0$ dan $0 \leq E_i \leq E_{imax}$ untuk $i = 1, 2, 3$ dan titik ekuilibrium interior tersebut stabil jika memenuhi syarat uji kestabilan Routh-Hurwitz.

Dari hasil simulasi dalam kasus $E_1 = E_2 = E_3$, $E_3 = E_3$, dan $E_1 \neq E_2 \neq E_3$ diperoleh nilai usaha-usaha pemanenan yang optimal yang memberikan titik ekuilibrium interior $T_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ stabil asimptotik dan memberikan keuntungan maksimal dari usaha eksploitasi populasi mangsa dan populasi pemangsa.

Dari hasil analisis teoritis dan numerik, disimpulkan bahwa kewujudan dan kestabilan titik ekuilibrium interior $T_3 = (N_{1E}, N_{2E}, N_{3E})$ ditentukan oleh besaran nilai usaha-usaha pemanenan yang diberikan. Ketiga populasi dapat tetap lestari meskipun dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan dan juga memberikan keuntungan maksimal.

Daftar Pustaka

- [1] Luckinbill, L.S. Coexistence in laboratory populations of paramecium aurelia and its predator didinium nasutum. *Journal of Ecology*. 54(6):1320-1327, 1973.
- [2] Martin, A. and Ruan, S. Predator-prey models with time delay and prey harvesting. *J. Math. Biol.* 43:247-267, 2001.
- [3] Kar, T.K. and Chauduri, K.S. On non-selective harvesting of a multispecies fishery. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 33(4):543-556, 2002.
- [4] Holmberg, J. Socio-ecological principles and indicators for sustainability, *PhD Thesis*, Goteborg University, Sweden, 1995.
- [5] Hogarth, W.L., Norbury, J., Cuning, I. and Sommers, K. Stability of a predator-prey model with harvesting. *Ecological Modelling*. 62:83-106, 1992.
- [6] Clark, C.W. *Mathematical Bioeconomics, The optimal management of renewable resources*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York-Toronto, 1990.
- [7] Sun, Z., Li, Y., Yang, H. and Lin, L. A stage-structure predator-prey model with functional response. *Applied Mathematical Sciences*. Vol.2 No.7, 333-339, 2008.
- [8] Kar, T.K. and Chattopadhyay, S. K. A dynamic reaction model of a prey-predator system with stage-structure for predator. *Modern Applied Science*, 4, No.5: 183-195, 2010.
- [9] Chaudhuri, K. S. Dynamic optimization of combined harvesting of two species fishery. *Ecological Modelling*, 41, 17-25, 1998.
- [10] Jeffries, C. *Mathematical Modeling in Ecology*, Boston, Birkhauser, 1989.

- [11] Chakraborty, K., Chakraborty, M., and Kar, T.K. Optimal control of harvest and bifurcation of a prey-predator model with stage struktur, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 8778-8792, 2011.

Lampiran 1. Fungsi keuntungan untuk Kasus 3

$$\begin{aligned}
\pi := & -\frac{1}{(5. + 4. E_2)^4} \left(0.1000000000 \left(4.797862410^7 E_2^2 \right. \right. \\
& + 1.80000010^6 E_1 E_3 E_2 + 2.80800010^6 E_1 E_2^2 E_3 \\
& - 5.124600010^7 E_1 E_3^2 E_2 - 6.130080010^7 E_1 E_3^2 E_2^2 \\
& + 2.18880010^6 E_1 E_3 E_2^3 + 6.4512010^5 E_1 E_2^4 E_3 \\
& - 3.259008010^7 E_1 E_3^2 E_2^3 - 6.49728010^6 E_1 E_3^2 E_2^4 \\
& + 1.224000010^7 E_1^2 E_3 E_2 + 1.555200010^7 E_1^2 E_2^2 E_3 \\
& + 9.00000010^6 E_1^2 E_3^2 E_2 + 1.080000010^7 E_1^2 E_3^2 E_2^2 \\
& + 8.75520010^6 E_1^2 E_3 E_2^3 + 1.84320010^6 E_1^2 E_2^4 E_3 \\
& + 5.76000010^6 E_1^2 E_3^2 E_2^3 + 1.15200010^6 E_1^2 E_3^2 E_2^4 \\
& + 3.24000010^6 E_1 E_3^3 E_2 + 3.88800010^6 E_1 E_3^3 E_2^2 \\
& + 2.07360010^6 E_1 E_3^3 E_2^3 + 4.1472010^5 E_1 E_3^3 E_2^4 + 37500. \\
& + 5.6250010^5 E_1 E_3 - 9.75360010^6 E_1 E_2^2 - 5.869344010^7 E_3 \\
& E_2^2 + 3.6743976010^8 E_3^2 E_2 - 1.606500010^7 E_1 E_3^2 \\
& - 4.056179210^7 E_3 E_2^3 - 1.091379210^7 E_3 E_2^4 \\
& - 1.562368010^7 E_1 E_2^3 - 6.26432010^6 E_1 E_2^4 + 5.18400010^6 \\
& E_1^2 E_2 + 3.60000010^6 E_1^2 E_3 + 7.32960010^6 E_1^2 E_2^2 \\
& + 2.81250010^6 E_1^2 E_3^2 + 4.72320010^6 E_1^2 E_2^3 + 1.15200010^6 E_1^2 \\
& E_2^4 + 4.3845494410^8 E_3^2 E_2^2 + 2.3268556810^8 E_3^2 E_2^3 \\
& + 4.633804810^7 E_3^2 E_2^4 - 4.612140010^7 E_3^3 E_2 - 5.517072010^7 \\
& E_3^3 E_2^2 - 2.933107210^7 E_3^3 E_2^3 - 5.84755210^6 E_3^3 E_2^4 \\
& + 1.01250010^6 E_1 E_3^3 + 1.45800010^6 E_3^4 E_2 + 1.74960010^6 E_3^4 \\
& E_2^2 + 9.3312010^5 E_3^4 E_2^3 + 1.8662410^5 E_3^4 E_2^4 + 1.1554785010^8 E_3^5 \\
& + 1.44000010^6 E_1^2 + 9.568684810^7 E_2^3 + 4.041958410^7 E_2^4 \\
& - 1.445850010^7 E_3^3 + 4.5562510^5 E_3^4 + 2560. E_2^5 \\
& - 2.9375010^5 E_1 - 1.058375010^7 E_2 - 1.338125010^7 E_3 \\
& \left. \left. - 4.201000010^7 E_3 E_2 - 2.5000010^5 E_2 E_1 \right) \right)
\end{aligned}$$